

**Le leggi finanziarie dell'interesse semplice e composto, e l'ammortamento dei prestiti**

**1. Interesse semplice ed interesse composto**

Ricordiamo alcune definizioni elementari.

Si parla di *interesse semplice* quando la misura d'interessi generata in un'operazione sia proporzionale al capitale  $C$  investitovi ed alla sua durata  $t$ , e sia data pertanto dal prodotto

$$(1) \qquad iCt.$$

Nella formula, la quantità  $i$  è il *tasso annuo d'interesse* ("annuo" se la durata  $t$  è misurata in anni: ma non si tratta necessariamente di un numero intero!). Siamo, come si vede, in presenza di una "funzione lineare" della durata  $t$  (oltre che del capitale  $C$ ): il che, in parole semplicissime, vuol dire che a durata doppia (o a capitale doppio) corrisponde un interesse doppio.

Ponendo nella (1)  $C = t = 1$ , e dunque immaginando di investire un euro per un anno, il prodotto fornisce il valore  $i$ : dunque, il tasso annuo può espressivamente definirsi come interesse generato da un euro investito per un anno.

Al passare del tempo, il "valore complessivo" dell'investimento, tecnicamente detto *montante*, risulta come somma del capitale iniziale  $C$  e degli interessi generati  $iCt^1$ , e vale dunque

$$(2) \qquad C + iCt$$

o, in ultima analisi<sup>2</sup>:

$$(3) \qquad C(1 + it).$$

Si parla invece di *interesse composto* quando la formula del montante sia, in luogo di (3):

$$(4) \qquad C(1 + i)^t$$

e dunque l'interesse (che è la differenza tra il montante ed il capitale) è dato da

$$(5) \qquad C(1 + i)^t - C.$$

Pur formalmente meno elementare della (3), la (4) ha il suo stesso significato: entrambe consentono di determinare il montante che un certo capitale investito ad un certo tasso genera in capo ad una durata qualunque. Allo stesso modo, ma con riferimento agli interessi anziché al montante, la (5) corrisponde alla (1)<sup>3</sup>. La (1), o la (3) da essa immediatamente ricavabile,

---

<sup>1</sup> L'uguaglianza *montante = capitale + interessi* esprime in altra forma quella elementarmente nota nei termini *ricavo = spesa + guadagno*.

<sup>2</sup> Naturalmente, se non ci sono state ulteriori immissioni di capitale "fresco".

<sup>3</sup> Anche la (5), ponendovi  $C = t = 1$ , fornisce il valore  $i$ : quantità che conferma dunque, in questo contesto, il suo significato di interesse generato da un euro investito per un anno.

formalizza quella che si chiama una *legge dell'interesse semplice*; la (4), una *legge dell'interesse composto*.

Non sfuggerà il fatto che le due leggi sono presentate in modo asimmetrico. Nell'interesse semplice, l'interesse è definito in modo diretto (tramite la (1)), ed il montante risulta per addizione (la (2), semplificata nella (3)). Per l'interesse composto, invece, ad essere definito direttamente è il montante (formula (4)), e l'interesse risulta, diremmo "residualmente", come differenza con il capitale iniziale (formula (5)).

I fattori  $(1 + it)$  ed  $(1 + i)^t$  che figurano nelle (3) e (4) ricevono il nome di *fattori di capitalizzazione*.

E' subito visto che, a parità di tasso  $i$  e di capitale  $C$ , l'interesse generato in un anno è lo stesso per le due leggi, ed uguale a  $iC$ . Ciò risulta immediatamente dalle formule (1) e (5), ponendo in esse  $t = 1$ ; ma anche riflettendo sul fatto che il tasso annuo è appunto definito come l'interesse generato da un euro in un anno, senza alcun riferimento alla sua modalità di formazione. Per durate diverse dall'anno, le due formule danno invece quantità diverse: l'interesse semplice produce interessi (e dunque montanti) maggiori dell'altro per durate inferiori all'anno; il contrario è vero per durate superiori.

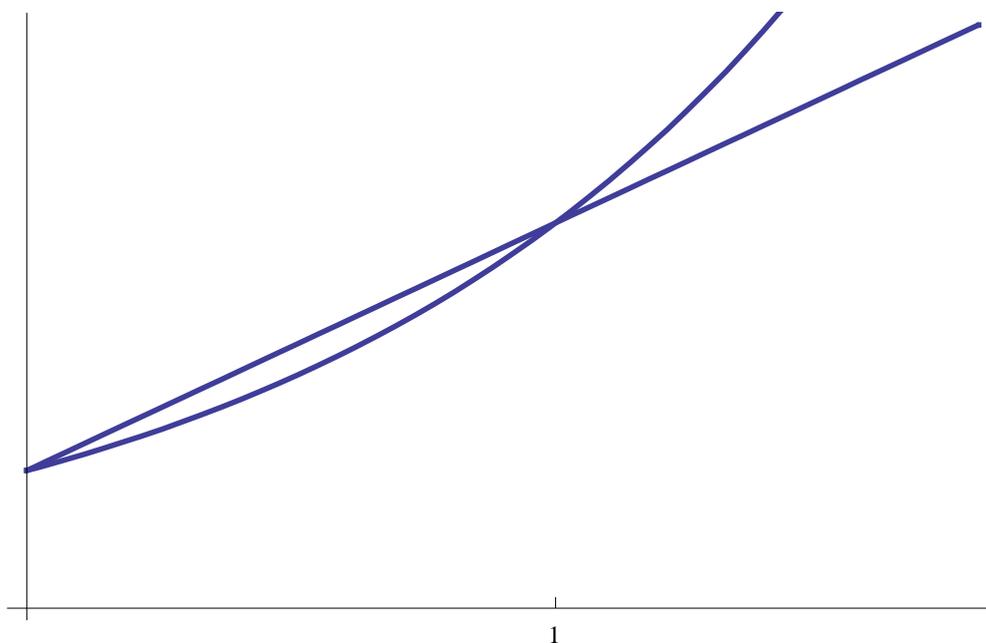


Fig. 1: *Montante, all'aumentare della durata, in interesse semplice (semiretta) ed in composto (curva esponenziale)*

## 2. L'interesse composto come legge standard; il TAEG (o TAE), il TIR e il TAN

Le due leggi dell'interesse semplice e composto sono le più importanti della Matematica Finanziaria: forse le uniche praticamente utilizzate. Ma sono assai diversamente importanti.

Quella dell'interesse semplice trova applicazione in molti operazioni reali: ad esempio, e sia pure con un'importante modifica che diremo, regola i contratti di conto corrente bancario e, in un certo senso, quelli di prestito. Quella dell'interesse composto, invece, è definita in modo del tutto teorico, con riferimento ad un'operazione impossibile nella realtà (la "capitalizzazione continua degli interessi": ne parleremo al par. 3). Né è possibile indicare uno specifico impiego per il quale si possa affermare che il capitale è destinato a priori ad evolversi secondo essa..

Con tutto ciò, l'interesse composto è, puramente e semplicemente, la legge standard, diremmo "di *default*", della Matematica Finanziaria.

Si consideri il concetto di tasso annuo effettivo globale (il popolare TAEG). Nella legge n. 142 del 1992 (art. 19) si legge che esso rappresenta *il costo totale del credito per il consumatore espresso in percentuale annua del credito concesso ... , calcolato conformemente alla formula matematica che figura nell'allegato II alla direttiva del Consiglio 90/88/CEE*. Per parte sua, questa Direttiva precisa che si tratta del tasso<sup>4</sup> *che rende uguali, su base annua, i valori attuali di tutti gli impegni (prestiti, rimborsi e oneri<sup>5</sup>) esistenti o futuri presi dal creditore*.

Come si vede, il legislatore europeo dimentica di indicare la legge da impiegare per calcolare quei "valori attuali". O, più probabilmente, lo ritiene inutile: a nessun essere raziocinante può venire in mente di usarne una che non sia quella dell'interesse composto.

Per fortuna, a fugare ogni possibile dubbio, o ogni possibile appiglio per interpretazioni pretestuose, la Direttiva stessa aggiunge che tale tasso è *calcolato conformemente alla formula matematica che figura nell'allegato II*. E nella formula, che è questa:

$$(6) \quad \sum C_k(1+x)^{-t_k} = \sum D_l(1+x)^{-s_l}$$

nessuno può non riconoscere i fattori di sconto<sup>6</sup> dell'interesse composto.

La (6) esprime l'uguaglianza tra i valori attuali di quanto il debitore riceve (a primo membro) e quanto egli è tenuto a pagare (a secondo membro). Le somme in entrata:  $C_1, C_2, \dots$ , s'intendono ricevute ai tempi  $t_1, t_2, \dots$ ; similmente, le rate di rimborso  $D_1, D_2, \dots$  hanno tempi di pagamento  $s_1, s_2, \dots$ . Occorre osservare che, in realtà, la formula è quella che definisce, più in generale, il TIR ("tasso interno di rendimento", o *internal rate of return*) dell'operazione consistente nel pagare  $C_1, C_2, \dots$  e nell'incassare  $D_1, D_2, \dots$ : concetto più generale di quello di TAEG. Sembra sfuggito all'estensore che l'equazione (6) può non ammettere soluzioni finanziariamente accettabili, o ammetterne più d'una.

Nel caso più semplice e più comune, di un creditore che riceva la somma  $C$  al tempo 0 e debba poi pagare  $n$  annualità  $D_1, \dots, D_n$  rispettivamente dopo 1, ...,  $n$  anni, la (6) assume la più amichevole forma:

$$(7) \quad C = \frac{D_1}{1+x} + \dots + \frac{D_n}{(1+x)^n}$$

e questa invece, per il teorema di Cartesio, ammette sempre<sup>7</sup> una sola soluzione maggiore di  $-1$ : dunque, il TAEG di una normale operazione di prestito è sempre ben definito.

Segnaliamo, ancora, che la dicitura della legge (il TAEG è "il costo totale del credito espresso in percentuale annua del credito concesso"), ripresa del resto anch'essa, letteralmente, dalla formulazione della Direttiva, è da considerare errata: o meglio, priva di senso.

Infatti, si consideri un'operazione di prestito, per la quale si ricevono 200 euro e se ne pagano 5 subito e poi 55 per quattro semestri. Ha senso dire che il TAEG (10,26%) è una "percentuale annua [?] del credito concesso (200)"? Qual è il "costo totale del credito"? Forse 25 (perché si pagano in tutto  $5 + 4 \times 5 = 25$ , per avere 200)? E forse 25 è il 10,26% annuo di 200?

Probabilmente, quello che si voleva dire è che il TAEG è un indicatore rappresentante il costo effettivo del finanziamento: che è un'ottima e comprensibile descrizione, ma non è una definizione.

<sup>4</sup> La sua denominazione inglese è Annual Percentage Rate of Charge ("APR").

<sup>5</sup> Considerare sia i prestiti (da una parte) che i rimborsi ed oneri (dall'altra), tutti come "impegni presi dal creditore" è in realtà una scelta terminologica alquanto singolare.

<sup>6</sup> I fattori di sconto, o di anticipazione, non sono altro che gl'inversi moltiplicativi dei fattori di capitalizzazione visti al par. 1.

<sup>7</sup> Beninteso, nel caso "naturale" che sia la quantità  $C$  che tutte le  $D_l$  siano positive.

Se si vuole una definizione corretta del TAEG, eccone due:

(a) è l'unica soluzione maggiore di  $-1$  dell'equazione (7): definizione perfetta, ma tecnica e forse criptica

(b) è il tasso annuo al quale chi concede il prestito dovrebbe alternativamente investire (in interesse composto) il capitale prestato, per poter ricavare lo stesso flusso di entrate: è la formulazione preferita da chi scrive.

Ad illustrazione della (b): lo schema seguente mostra cosa accade se, con i dati dell'esempio, i 195 euro di fatto prestati vengono invece investiti al 10,26% annuo (interesse composto). Ogni freccia orizzontale corrisponde al trascorrere di un semestre. Come si vede, l'operatore è in grado di staccare 55 euro ogni 6 mesi (né più, né meno), e godere dunque esattamente delle stesse entrate che il prestito gli avrebbe fornito.

$$\begin{array}{r} 195 \rightarrow 204,76 \\ -55 = 149,76 \rightarrow 157,25 \\ -55 = 102,25 \rightarrow 107,36 \\ -55 = 52,36 \rightarrow 55 \end{array}$$

Rovesciando il punto di vista, lo schema mostra che il TAEG può anche definirsi come (b) il tasso annuo al quale chi contrae il prestito dovrebbe investire (in interesse composto) il capitale ricevuto, per poter pagare quanto previsto dal piano di rimborso.

Come si vede, può ritenersi che il TAEG misuri correttamente la redditività del prestito per chi lo concede, il suo costo per chi lo contrae.

Il concetto di TIR generalizza quello di TAEG, quest'ultimo essendo appunto il TIR dell'operazione consistente nel pagare  $C$  e ricevere poi  $D_1, D_2, \dots$  (o nel ricevere la prima somma, e pagare le seconde). Non ci soffermiamo su ciò, né sulle problematiche cui esso dà luogo, se non per sottolineare il fatto che è basato anch'esso sull'utilizzo dell'interesse composto.

Quando, nel calcolo del TAEG, si prescinda dagli eventuali costi accessori, si ottiene quello che si chiama il tasso annuo effettivo, o TAE (che sarebbe in realtà opportuno qualificare come "netto"). Nel seguito, ci capiterà però di confondere spesso le due nozioni: gli esempi saranno sempre "di scuola", senza la presenza di alcun costo aggiuntivo.

Quanto al TAN (acronimo di "tasso annuo nominale"), il fatto che venga spesso citato assieme al TAEG suggerisce l'idea, sbagliata, che si tratti di due parametri della stessa importanza. In realtà, chi scrive non ha mai incontrato una disposizione che ne renda obbligatoria la comunicazione, o ne dia una definizione "ufficiale". In Matematica Finanziaria, è definito come ammontare annuo d'interessi pagati nel corso di un anno a fronte di un euro investito in interesse composto, ed è sempre accompagnato dall'indicazione della frequenza con cui avvengono i pagamenti. Nell'uso comune, tale indicazione manca. Ciò rende il TAN un parametro insoddisfacente e potenzialmente fuorviante. Se ci si limita a dire che esso è del 10%, si comunica che per 1.000 euro presi in prestito si pagheranno 100 euro l'anno d'interessi, ma resta nascosto se saranno pagati in una sola rata (ad es.) posticipata (TAEG 10%), o in due rate da 50 pagate alla fine di ciascun semestre (TAEG 10,25%), o in 4 da 25 pagate trimestralmente (TAEG 10,38%), e così via.

Inoltre, nel calcolo del TAN non si tiene in alcun modo conto dei costi necessari, quasi inevitabilmente presenti nelle operazioni reali (quando tali costi vengano ignorati in sede di determinazione del TAEG, si ottiene il cosiddetto "tasso annuo effettivo", o TAE).

Per entrambe le ragioni indicate, il TAN (almeno, nell'uso che se ne fa) va considerato un parametro sostanzialmente inutile.

Onestà vuole che si rilevi come anche il TAEG, peraltro, non esaurisca il problema della valutazione di un prestito. Di due prestiti con lo stesso TAEG, ottime ragioni logiche possono portare a preferire l'uno rispetto all'altro. I due descritti dai seguenti piani di rimborso:

anno	debito iniziale	pagamenti		debito finale
		interessi	c/capitale	
1	1.000	100	0	1.000
2	1.000	100	1.000	0

anno	debito iniziale	pagamenti		debito finale
		interessi	c/capitale	
1	1.000	100	500	500
2	500	50	500	0

hanno entrambi il TAEG del 10%; ma chi preveda un ribasso dei tassi sceglierà il secondo, mentre il primo è improponibile a chi, tra un anno, non sarà in grado di rimborsare 500 euro.

### 3. L'interesse semplice "corretto"

Al di là della evidente e notissima differenza formale (par. 1), tra le leggi dell'interesse semplice e composto vi è un'importante differenza sostanziale, meno spesso rilevata.

Quando un capitale sia investito secondo la legge (o, come anche si dice, "nel regime") dell'interesse semplice, gl'interessi via via prodotti sono resi disponibili soltanto a scadenze prestabilite. Salve convenzioni ulteriori, il titolare può intervenire in ogni momento sul capitale investito, ma per quel che riguarda gl'interessi egli deve aspettare il termine dell'operazione, oppure che essi "maturino" secondo quanto pattuito. A tali scadenze, gl'interessi possono essere pagati (tipicamente, nei contratti di prestito) o "capitalizzati": ossia, liquidati e aggiunti automaticamente al capitale a frutto (questo accade nei contratti di conto corrente).

Invece, quando ci si trovi nel regime dell'interesse composto, gl'interessi via via prodotti non devono "maturare" in alcun modo: essi diventano istantaneamente fruttiferi, dunque "capitale" a loro volta, e tutto lo "attivo patrimoniale" è in ogni istante disponibile.

Useremo qui la locuzione "interesse semplice corretto"<sup>8</sup> per designare una legge dell'interesse semplice che preveda il pagamento, o la capitalizzazione, degl'interessi prodotti, periodicamente ed anticipatamente rispetto al termine finale dell'operazione.

E' fondamentale osservare che un investimento in "interesse semplice corretto" si svolge in realtà, sostanzialmente, secondo l'interesse composto. Più precisamente, e riferendoci ad un investimento in interesse semplice al tasso annuo  $i$ :

- se è prevista la capitalizzazione degl'interessi ogni  $m$ -mo di anno, alla fine di ogni  $m$ -mo di anno il montante accumulato è lo stesso di quello prodotto investendo lo stesso capitale in interesse composto al tasso annuo dato dalla formula:

$$(8) \quad \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

- se è previsto il pagamento degl'interessi ogni  $m$ -mo di anno, si può ottenere lo stesso flusso investendo lo stesso capitale in interesse composto al tasso dato dalla formula appena scritta.

Ad illustrazione (non a dimostrazione!) di quanto sopra, supponiamo di investire 1.000 euro per due anni, al 10% annuo, in "interesse semplice corretto", con pagamento o capitalizzazione degl'interessi ogni 6 mesi. Ponendo nella (8)  $m = 2$ , si ha che l'investimento è da considerare equivalente a quello in interesse composto al 10,25%.

Invero:

- Se è prevista la capitalizzazione semestrale degl'interessi, la dinamica del montante generato dall'interesse semplice (corretto!) è descritta dallo schema:

$$1.000 \rightarrow (1.000 + 50 =) 1.050 \rightarrow (1.050 + 52,50 =) 1.102,50 \rightarrow (1.102,50 + 55,13 =) 1.157,63$$

(come al par. 2, ogni freccia orizzontale corrisponde al trascorrere di un semestre). Nel caso dell'interesse composto si ha invece:

<sup>8</sup> Avvertiamo che questa denominazione non è affatto standard.

1.000  $\rightarrow$  (1.000 x 1,1025<sup>1/2</sup>  $\Rightarrow$ ) 1.050  $\rightarrow$  (1.050 x 1,1025<sup>1/2</sup>  $\Rightarrow$ ) 1.102,50  $\rightarrow$  (1.102,50 x 1,1025<sup>1/2</sup>  $\Rightarrow$ ) 1.157,63

ossia esattamente gli stessi valori<sup>9</sup>.

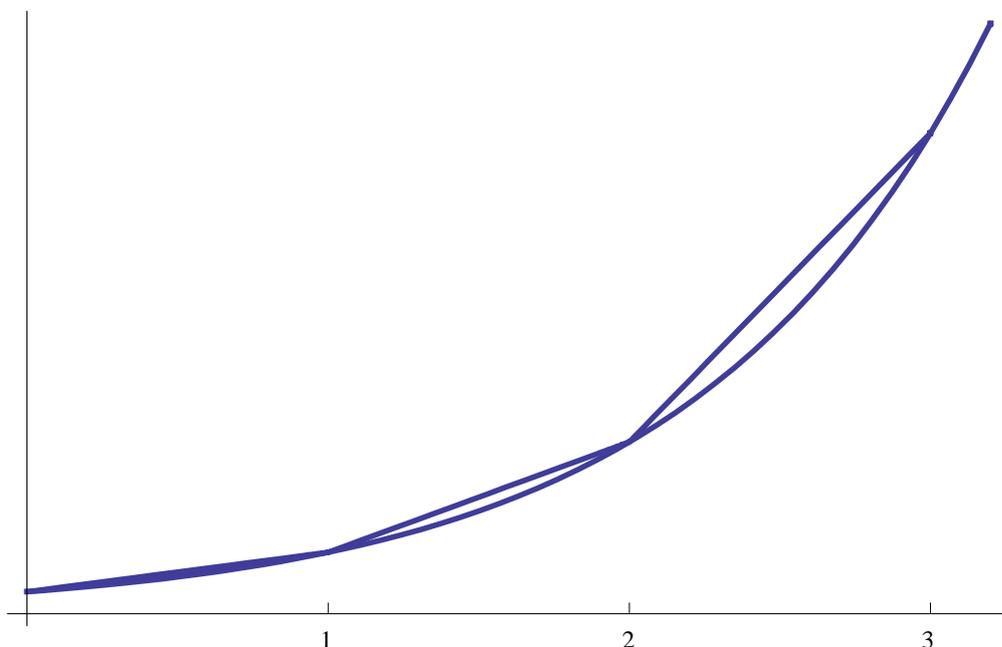


Fig. 2 - Montante, all'aumentare della durata, in interesse semplice corretto con la capitalizzazione annua degl'interessi (linea spezzata) ed in interesse composto (curva esponenziale)

- Se è previsto il pagamento periodico degl'interessi, nel caso dell'interesse semplice (corretto) si riscuotono 50 euro ogni 6 mese; lo stesso può ottenersi se l'impiego avviene in interesse composto.

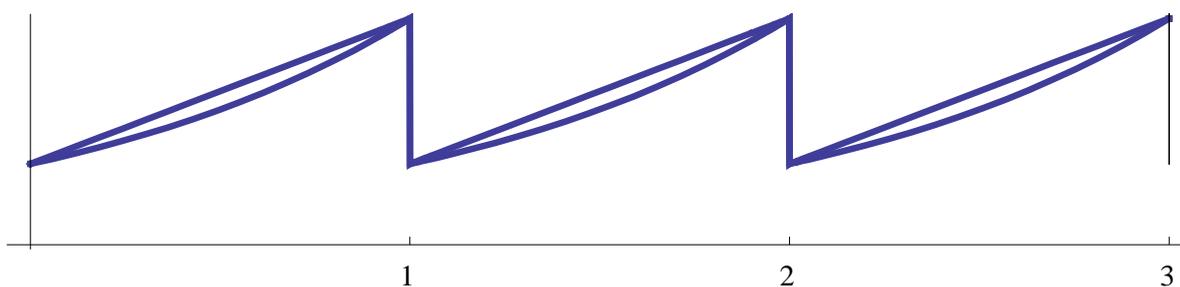


Fig. 3 - I segmenti verticali, uguali nei due casi di investimento in interesse semplice corretto (andamento rettilineo) ed in composto (andamento esponenziale), rappresentano quanto pagato ai tempi 1, 2 e 3.

Conviene ripeterlo per l'importanza che avrà nel seguito: prevedere il pagamento (o la capitalizzazione) periodica degl'interessi, trasforma un impiego in interesse semplice in uno in interesse composto, ad un tasso maggiore; tanto maggiore quanto più è frequente il pagamento (o la

<sup>9</sup> Naturalmente, e come si è specificato, si ha uguaglianza di montante solo alle scadenze semestrali. Dopo 9 mesi, ad es., il montante in interesse semplice (corretto!) è di 1.076,25, quello in composto di 1.075,93.

capitalizzazione): ossia quanto maggiore è il parametro  $m$ . La tabella successiva (costruita in base alla formula (8)) mostra come il valore del tasso dell'interesse composto equivalente a quello semplice del 10% "corretto" cresca, al crescere di  $m$ .

*Tasso in interesse composto equivalente al 10% semplice "corretto"*

$m$	(frequenza)	tax equival.
1	(annuale)	10%
2	(semestrale)	10,25%
3	(quadrim.)	10,34%
4	(trimestrale)	10,38%
12	(mensile)	10,47%

Sottoliniamo anche (pensando al concetto, giuridico e non matematico-finanziario, di *anatocismo*): nell'interesse semplice corretto, gli interessi finiscono per produrre interessi. Questo è del tutto evidente nel caso che essi vengano capitalizzati; nell'altro caso, gl'interessi scaduti e non pagati diventano automaticamente produttori di interessi di mora, mentre quelli pagati sono disponibili per un nuovo investimento, a sua volta produttivo.

Infine, quella che può qui considerarsi una curiosità. S'immagini, con uno di quei "passaggi al limite" tanto familiari ai matematici quanto senza senso nella vita reale, di compiere la capitalizzazione "con continuità": fin dall'inizio dell'investimento, gl'interessi via via prodotti vengono istantaneamente ("capitalizzati", ossia) messi a loro volta a frutto. Questa situazione ideale corrisponde ad un impiego secondo la legge dell'interesse composto. Nella tabella precedente, riferita al tasso annuo del 10%, si potrebbe aggiungere, come ultima riga, la seguente:

$\infty$	(continua)	10,52%
----------	------------	--------

#### 4. Alcune generalità sui contratti di prestito. La convenzione del dietimo

Un contratto di prestito è definito quando sia stabilito il suo piano d'ammortamento, ossia lo scadenziario dei pagamenti dovuti dal debitore: quanto e quando egli sia tenuto a corrispondere al creditore. Per motivi giuridici o fiscali, può anche essere necessario specificare quanto, di ciascun pagamento (o "rata di ammortamento"), sia da considerare "in conto capitale" e quanto "in conto interessi".

Si comprende, quindi, come l'indicazione sintetica dei soli dati principali (ammontare, durata, tasso di remunerazione da impiegare per il calcolo degl'interessi) sia del tutto insufficiente ad individuare gli obblighi del debitore. Vanno infatti ancora stabiliti la modalità del rimborso (progressivo, o alla scadenza), la cadenza di pagamento degl'interessi e la modalità del loro calcolo. Sottoliniamo come tutto ciò debba essere oggetto di pattuizione specifica, anche se esistono soluzioni standard più o meno consuete. Sottoliniamo ancora: stabilire che il prestito sarà remunerato in ragione di un certo tasso annuo non vuol dire che gli interessi debbano venire pagati annualmente, ma serve solo a stabilire la velocità con cui gli interessi stessi vengono generati. Resta ancora ambigua la legge da impiegare per la loro quantificazione effettiva.

Abbiamo già illustrato, alla fine del par. 2, la "superiorità" del piano di rimborso rispetto al TAEG ai fini di una scelta razionale; superiorità del resto ovvia se si pensa che se si conosce il piano si può calcolare il TAEG (risolvendo la (7), i cui coefficienti si leggono nel piano), mentre non è vero il contrario.

Il piano di ammortamento lascia il solo margine di ambiguità costituito dal fatto che non è possibile, da esso, risalire al regime impiegato; questione però di rilievo solo nel caso di estinzione anticipata del prestito.

Consideriamo il semplice esempio di un prestito di 1.000 euro, per il quale non vi siano spese accessorie di alcun tipo, e sia da rimborsare secondo il seguente piano di ammortamento:

Tabella 1 - *Un piano d'ammortamento*

<i>anno</i>	<i>debito iniziale</i>	<i>pagamenti</i>		<i>debito finale</i>
		<i>interessi</i>	<i>c/capitale.</i>	
1	1.000	100	500	500
2	500	50	500	0

Il TAEG calcolato a posteriori (ossia, dai dati in tabella) è il 10%. Stabilire a quale legge finanziaria ci si sia riferiti per costruire la tabella sembra del tutto irrilevante: l'interesse composto e quello semplice con pagamento annuo degli interessi producono gli stessi risultati.

Si supponga però che una delle parti chieda l'estinzione del prestito a metà del secondo anno. Quanto deve il debitore in conto interessi? Secondo l'universalmente accettato uso dei "dietimi", si tratta semplicemente della metà della quota interessi dovuta per l'anno: ossia, 25 euro. Ciò equivale, com'è evidente, a supporre che ci si trovi nel regime dell'interesse semplice: in quello dell'interesse composto, infatti, i 500 euro di debito residuo generano, in sei mesi, solo 24,40 euro d'interesse. Se, in sede di pattuizione del prestito, ci si era accordati soltanto sul piano di rimborso e non anche sulla natura della legge da impiegare, vi è spazio per contendere.

Si noti infatti che se, in favore della soluzione "dietimo" milita quello che abbiamo detto essere l'uso universale, in favore dell'altra si può osservare che il TAEG di un'operazione che preveda l'incasso di 1.000 al tempo 0, ed il pagamento di 600 dopo un anno e  $500 + 25 = 525$  dopo uno e mezzo risulta (si ricordi la (7)) dall'equazione:

$$1.000 = \frac{600}{1+x} + \frac{525}{(1+x)^{1,5}}$$

e vale dunque  $x = 0,1005$ . La soluzione alternativa porta invece a scrivere l'equazione:

$$1.000 = \frac{600}{1+x} + \frac{524,40}{(1+x)^{1,5}}$$

che ha soluzione  $x = 0,10$ . Come si vede, la convenzione del dietimo altera la misura del TAEG, e andrebbe dunque giudicata illegittima.

## 5. I prestiti con pagamento periodico degli interessi

Se un contratto di prestito prevede il pagamento periodico degli interessi via via maturati, la legge finanziaria applicata è ovviamente quella dell'interesse semplice corretto. Dovrebbe a questo punto essere attesa la conclusione che, dunque, ci troviamo nell'interesse composto e non in quello semplice. Ciò vale indipendentemente dalle modalità del rimborso: sia esso alla scadenza in unica soluzione<sup>10</sup>, o più in generale progressivo: a rate costanti o variabili. Dunque, anche nel caso dell'ammortamento francese (cui poi dedicheremo, comunque, un paragrafo a parte).

<sup>10</sup> Non si confonderà questa tipologia con quella dei prestiti "con pagamento del montante alla scadenza", o Zero Coupon Bonds, quali i nostri CTZ: che - non prevedendo pagamento periodico di interessi - restano invece fuori da queste considerazioni.

A conferma di quanto sopra, torniamo a vedere l'esempio in tabella 1 (par. 4). Abbiamo visto che il TAEG di quell'operazione è il 10%: dunque, per definizione di TAEG, l'operazione si svolge in interesse composto a questo tasso. O, in altre parole, si può ottenere lo stesso flusso di entrate prodotto dal prestito ({600, 550}) investendo 1.000 euro per due anni in interesse composto al 10%.

Chi prestasse invece 1.000 euro per due anni al 10% in interesse semplice, avrebbe diritto a riscuoterne 1.200 dopo 2 anni. Se volesse invece procurarsi quel flusso, dovrebbe investire 545,45 euro per un anno e, allo stesso tempo, altri 458,33 per due, per un capitale totale di 1.003,79. (Se si investono 1.000 euro al 10% in interesse semplice *tout court*, e si ritirano 600 euro alla fine del primo, questi vanno a decurtare il capitale iniziale; con il che, il montante disponibile alla fine del second'anno diventa solo 540).

Quando poi (come spessissimo è il caso) la frequenza dei pagamenti sia infrannuale, vi è un elemento di ambiguità in meno, e la situazione ne guadagna in chiarezza. Se il piano di rimborso è questo:

<i>semestre</i>	<i>deb. iniz.</i>	<i>interessi</i>	<i>c/capitale</i>	<i>deb. finale</i>
1	1.000	50	0	1.000
2	1.000	50	0	1.000
3	1.000	50	0	1.000
4	1.000	50	1.000	0

il TAEG "di legge" è il 10,25: dunque la lettura più diretta è che ci si trova in interesse composto a questo tasso. Se si preferisce l'interpretazione "interesse semplice 10%, con pagamento semestrale degli'interessi", non si fa che confermare che quest'ultimo equivale al 10,25% composto.

## 6. L'ammortamento francese

Forse la modalità di ammortamento progressivo maggiormente impiegata è quella detta "francese", definita dall'aver rate di rimborso costanti. Nella sua modalità standard, e supponendo che i pagamenti siano dovuti annualmente, esse sono dell'ammontare individuato dall'equazione:

$$(9) \quad C = \frac{x}{1+i} + \frac{x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{x}{(1+i)^n}$$

nella quale  $C$  rappresenta il capitale prestato,  $i$  il tasso di remunerazione annuo ed  $n$  (numero intero positivo) la durata in anni.

Ad esempio, l'ormai solito prestito di 1.000 euro al 10%, da rimborsare in due anni, dà dunque luogo al seguente piano d'ammortamento:

Tabella 2 - *Prestito di 1.000 euro rimborsabile in 2 anni, al tasso del 10%, con ammortamento francese standard*

<i>anno</i>	<i>debito iniziale</i>	<i>interessi</i>	<i>pagamenti</i>		<i>debito finale</i>
			<i>c/capitale</i>	<i>tot.</i>	
1	1.000	100	476,19	576,19	523,81
2	523,81	52,38	523,81	576,19	-

Vale quanto più volte detto: il TAEG è il 10%, dunque questo prestito equivale ad un impiego in interesse composto a questo tasso.

In questo caso particolare, vi è però una conferma molto evidente della nostra prima affermazione, rappresentata dal fatto che la formula ((9)) dalla quale la misura della rata costante è fornita utilizza, come non si può fingere di non vedere, l'interesse composto. La stessa equazione, in termini di interesse semplice, si scrive infatti:

$$(10) \quad C = \frac{x}{1+i} + \frac{x}{1+2i} + \dots + \frac{x}{1+ni}$$

ed ha per soluzione, nel nostro caso ( $C = 1.000$ ,  $n = 2$ ,  $i = 0,10$ ) 573,91. Il corrispondente piano di rimborso è:

*Tabella 3 - Prestito di 1.000 euro rimborsabile in 2 anni, al tasso del 10%, con ammortamento francese in interesse semplice*

<i>anno</i>	<i>debito iniziale</i>	<i>interessi</i>	<i>pagamenti c/capitale</i>	<i>tot.</i>	<i>debito finale</i>
1	1.000	52,17	521,74	573,91	478,26
2	478,26	95,65	478,26	573,91	-

(ed il TAEG risulta pari al 9,70%). Non vi è più pagamento periodico degli interessi sul debito residuo: se così fosse, il pagamento per interessi al termine del primo anno sarebbe di 100 euro. Il prestito è stato scomposto, come nel caso visto al par. 4, in uno ad un anno per 521,74 euro, ed uno a due per 478,26, entrambi in interesse semplice al 10%.

A parte la scelta della formula (la (9) o la (10)?), vi è un'altra fase nella quale l'alternativa interesse semplice/composto si presenta spesso. Stabilito il tasso annuo di remunerazione del prestito (il suo TAEG<sup>11</sup>) del prestito, se la rata dovuta non è annuale, si pone il problema già visto al par. precedente. Nel caso, ad es., di rate mensili, occorre cominciare col calcolare il tasso mensile equivalente, e il risultato che si ottiene è diverso a seconda si usi l'interesse semplice o quello composto.

Nel caso dell'esempio, il calcolo in interesse composto porta ad un tasso mensile dello 0,79%, con una rata mensile pari a 45,95, ed un TAEG del 10% (come ci si poteva aspettare). Quello in interesse semplice, ad un tasso mensile dell'0,83%, con rata 46,14 e TAEG 10,47%. Se non si ricorre all'interesse composto, si altera il costo del prestito.

Per concludere: l'ammortamento francese standard appartiene a pieno titolo al regime dell'interesse composto (1) perché prevede pagamento periodico degli interessi, (2) perché a quel regime appartiene la formula da cui si ricava la rata costante, e (3) perché quello è il regime da usare per calcolare, a partire dal TAE, la rata dovuta in caso di pagamenti infrannuali.

<sup>11</sup> In realtà, la presenza di spese accessorie (iniziali e/o periodiche) introduce qualche difficoltà tecnica (prima fra tutte: la necessità di distinguere il TAE dal TAEG), del tutto irrilevante sul piano concettuale.